



УДК 511.51

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБОГО РЯДА В ПРОБЛЕМЕ КЛООСТЕРМАНА**RESEARCH OF A SPECIAL ROW IN KLOOSTERMAN'S PROBLEM****Л.Н. Куртова, Н.Н. Мотькина****L.N. Kurtova, N.N. Mot'kina**

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: kurtova@bsu.edu.ru; motkina@bsu.edu.ru

Аннотация

В 1770 году Ж.-Л. Лагранж доказал, что каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. В 1926 году Х. Д. Клоостерман получил асимптотическую формулу для числа представлений положительного целого в виде $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. В работе приведены результаты изучения главного члена этой асимптотической формулы. Исследование основано на представлении главного члена в виде произведения по простым числам и применении точных формул для сумм Гаусса.

Abstract

In 1770, J.-L. Lagrange proved that each natural number can be represented as the sum of four squares of integers. In 1926, H. D. Kloosterman obtained an asymptotic formula for the number of representations of a positive integer in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. The report will provide the results of the study the main member of this asymptotic formula. The study is based on the representation of the main member as a product of primes and the use of the exact formulas for Gauss sums.

Ключевые слова: асимптотическая формула, представление главного члена, сумма Гаусса, суммы Клоостермана.

Keywords: asymptotic formula, representation of the main member, Gauss sum, Kloosterman sum.

Введение

В 1770 году Ж.-Л. Лагранж доказал, что каждое натуральное число n представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. В 1926 году Х. Д. Клоостерман [1] получил асимптотическую формулу для числа решений $r(n)$ уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$:

$$r(n) = \frac{\pi^2 n}{\sqrt{abcd}} S(n) + O(n^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q),$$

$$A(q) = \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi \frac{nl}{q}} S(q; al; 0) S(q; bl; 0) S(q; cl; 0) S(q; dl; 0), \quad A_1 = 1,$$

$$S(q; u; 0) = \sum_{l=1}^q e^{2\pi \frac{ul^2}{q}}$$

– сумма Гаусса.

Данная работа посвящена исследованию особого ряда $S(n)$. Поскольку функция $A(q)$ является мультипликативной, тогда

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p|q} (1 + A(p) + A(p^2) + \dots).$$



Нами получены явные формулы для всех таких возможных произведений при нечетном простом p . Исследование основано на представлении главного члена в виде произведения по простым числам и применении точных формул для сумм Гаусса ([2] – [4]).

В данной работе представлены случаи, когда число решений уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ равно нулю.

Вспомогательные леммы

Лемма 1. Для одномерной суммы Гаусса

$$S(q; l; m) = \sum_{j=1}^q e^{2\pi i \frac{lj^2 + mj}{q}}$$

справедливы следующие утверждения:

1. Если $(q_1; q_2) = 1$, то

$$S(q_1 q_2; l; m) = S(q_1; l q_2; m) S(q_2; l q_1; m).$$

2. Если $(q; 2l) = 1$, то

$$S(q; l; m) = e^{-2\pi i \frac{(4l)^* m^2}{q}} \left(\frac{l}{q} \right) S(q; 1; 0),$$

где $4l(4l)^* \equiv 1 \pmod{q}$, $\left(\frac{l}{q} \right)$ – символ Якоби.

3. Если $(q; 2) = 1$, то

$$S(q; 1; 0) = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 1 \pmod{4}, \\ i\sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

4. Если $(q; l) = n$, то

$$S(q; l; m) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ не делит } m, \\ n S(q/n; l/n; m/n), & \text{если } n \text{ делит } m. \end{cases}$$

Лемма 2. (Свойства суммы Kloostermana) Пусть

$$K(q; u; v) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j, q)=1}}^q e^{2\pi i \frac{uj + vj^*}{q}}$$

— сумма Kloostermana. Справедливы следующие утверждения:

1. $K(q; -u; -v) = K(q; u; v)$.

2. Если $(w; q) = 1$, то $K(q; uw; v) = K(q; u; vw)$.

3. При $(q_1; q_2) = 1$ имеет место равенство

$$K(q_1 q_2; u; v) = K(q_1; u; v_1) S(q_2; u; v_2),$$

где v_1 и v_2 определены соответственно по модулям q_1 и q_2 сравнением

$$v_1 q_2^2 + v_2 q_1^2 \equiv v \pmod{q_1 q_2}.$$

4. Пусть $\alpha > 1$, p – простое число.



Если $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$, то

$$K(p^\alpha; u; v) = pK(p^{\alpha-1}; \frac{u}{p}; \frac{v}{p}).$$

Если $u \not\equiv 0 \pmod{p}$, $v \equiv 0 \pmod{p}$ или $u \equiv 0 \pmod{p}$, $v \not\equiv 0 \pmod{p}$, то

$$K(p^\alpha; u; v) = 0.$$

5. Пусть $(u; p) = 1$, $\alpha > 1$, p – простое число. Тогда

$$K(p; u; 0) = -1; K(p^\alpha; u; 0) = 0.$$

6. Пусть $u = p^\alpha u_1$, $(u_1; p) = 1$, $\alpha > 1$, $s > 1$, p – простое число. Тогда

$$K(p^\alpha; u; 0) = p^{\alpha-1}(p-1); K(p^{\alpha+1}; u; 0) = -p^\alpha; K(p^{\alpha+s}; u; 0) = 0.$$

Лемма 3. (Равенства для обобщенной суммы Kloostermana) Пусть p – нечетное простое число и

$$K_p(p^\alpha; u; v) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{j}{p} \right) e^{2\pi i \frac{uj+vj^s}{p^\alpha}}$$

— обобщенная сумма Kloostermana. Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $\alpha > 1$. Если $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$, то

$$K_p(p^\alpha; u; v) = pK_p(p^{\alpha-1}; \frac{u}{p}; \frac{v}{p}).$$

Если $u \not\equiv 0 \pmod{p}$, $v \equiv 0 \pmod{p}$ или $u \equiv 0 \pmod{p}$, $v \not\equiv 0 \pmod{p}$, то

$$K_p(p^\alpha; u; v) = 0.$$

2. Пусть $(u; p) = 1$, $\alpha > 1$. Тогда

$$K_p(p; u; 0) = S(p; u; 0); K_p(p^\alpha; u; 0) = 0.$$

3. Пусть $u = p^\alpha u_1$, $(u_1; p) = 1$, $\alpha > 1$, $s > 1$. Тогда

$$K_p(p^\alpha; u; 0) = 0; K_p(p^{\alpha+1}; u; 0) = p^\alpha S(p; u_1; 0); K(p^{\alpha+s}; u; 0) = 0.$$

Исследование особого ряда в проблеме Kloostermana

Рассмотрим случаи, когда число решений уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ равно нулю. Мы рассматриваем нечетное простое p .

1. Случай, когда три коэффициента делятся на p и n взаимно просто p

Пусть

$$a = p^\alpha a_1, (a_1; p) = 1, b = p^\beta b_1, (b_1; p) = 1, c = p^\gamma c_1, (c_1; p) = 1, \\ \alpha \geq 1, \beta \geq 1, \gamma \geq 1.$$

Тогда

$$A(p) = \frac{1}{p^4} p^3 \left(\frac{d}{p} \right) S(p; 1; 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p)=1}}^p \left(\frac{l}{p} \right) e^{-2\pi i \frac{nl}{p}} = \left(\frac{dn}{p} \right).$$

При $k \geq 1$, поскольку $(n; p) = 1$, из утверждения 5 леммы 2, утверждения 2 леммы 3 получаем, что $A(p^k) = 0$.



Имеем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ (n, p)=1}} \left(1 + \left(\frac{dn}{p} \right) \right).$$

Данная скобка может равняться нулю, если dn – квадратичный невычет по модулю p .

2. Случай, когда все коэффициенты делятся на p и n взаимно просто p

В этом случае уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений.

3. Случай, когда два коэффициента и n делятся на p

Положим

$$a = p^\alpha a_1, (a_1; p) = 1, \quad b = p^\beta b_1, (b_1; p) = 1, \quad n = p^\eta n_1, (n_1; p) = 1,$$

$$\alpha \geq 1, \quad \beta \geq 1, \quad \eta \geq 1.$$

1. Пусть $\eta < \alpha \leq \beta$. Тогда при $1 \leq k \leq \eta + 1$

$$A(p^k) = \frac{1}{p^{4k}} p^{2k} \left(\frac{cd}{p^k} \right) S^2(p^k; 1; 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^k)=1}}^k e^{-2\pi \frac{nl}{p^k}}.$$

Имеем

$$A(p^k) = \begin{cases} \left(\frac{-cd}{p^k} \right) \frac{p-1}{p}, & \text{если } 1 \leq k \leq \eta, \\ -\left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}} \right) \frac{1}{p}, & \text{если } k = \eta + 1. \end{cases}$$

При $k > \eta + 1$ в $A(p^k)$ будет входить либо сумма Kloostermana, либо обобщенная сумма Kloostermana, которые будут равны нулю в силу утверждения 6 из леммы 2 и утверждения 3 из леммы 3.

Получаем произведение:

$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ (c, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \eta < \alpha \leq \beta}} \left(1 + \frac{p-1}{p} \left(\left(\frac{-cd}{p} \right) + \dots + \left(\frac{-cd}{p^\eta} \right) \right) - \left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}} \right) \frac{1}{p} \right).$$

Если $(-cd)$ является квадратичным невычетом по модулю p , то для нечетного η рассматриваемая скобка будет равна нулю.

2. Пусть $\eta = \alpha < \beta$. Тогда при $1 \leq k \leq \eta$

$$A(p^k) = \left(\frac{-cd}{p^k} \right) \frac{p-1}{p}.$$

При $k = \eta + 1$ имеем:



$$A(p^{\eta+1}) = \frac{1}{p^{4(\eta+1)}} p^{2\eta+1} \left(\frac{a_1}{p} \right) \left(\frac{cd}{p^{\eta+1}} \right) S(p; 1; 0) S^2(p^{\eta+1}; 1; 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^{\eta+1})=1}}^{p^{\eta+1}} \left(\frac{l}{p} \right) e^{-2\pi i \frac{nl}{p^{\eta+1}}} =$$

$$= \left(\frac{a_1 n_1}{p} \right) \left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}} \right) \frac{1}{p}.$$

При $k > \eta + 1$ суммы Клоостермана будут равны нулю в силу утверждения 6 из леммы 2 и утверждения 3 из леммы 3.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ (c, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \eta < \alpha < \beta}} \left(1 + \frac{p-1}{p} \left(\left(\frac{-cd}{p} \right) + \dots + \left(\frac{-cd}{p^\eta} \right) \right) + \left(\frac{a_1 n_1}{p} \right) \left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}} \right) \frac{1}{p} \right).$$

Данная скобка равна нулю, если η – нечетное, $a_1 n_1$ и $(-cd)$ – квадратичные невычеты по модулю p .

3. Пусть $\alpha < \eta < \beta$. Имеем

$$A(p^k) = \begin{cases} \left(\frac{-cd}{p^k} \right) \frac{p-1}{p}, & \text{если } 1 \leq k \leq \alpha, \\ \left(\frac{-cd}{p^k} \right) \frac{p-1}{p^{(k-\alpha)/2+1}}, & \text{если } \alpha < k \leq \eta \text{ и } k-\alpha \text{ - четное,} \\ 0, & \text{если } \alpha < k \leq \eta \text{ и } k-\alpha \text{ - нечетное.} \end{cases}$$

$$A(p^{\eta+1}) = \frac{1}{p^{4(\eta+1)}} p^{\alpha+\eta+1} \left(\frac{a_1}{p^{\eta+1-\alpha}} \right) \left(\frac{cd}{p^{\eta+1}} \right) S(p^{\eta+1-\alpha}; 1; 0) S^2(p^{\eta+1}; 1; 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^{\eta+1})=1}}^{p^{\eta+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta+1-\alpha}} \right) e^{-2\pi i \frac{nl}{p^{\eta+1}}} =$$

$$= \begin{cases} - \left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}} \right) \frac{1}{p^{(\eta+3-\alpha)/2}}, & \text{если } \eta-\alpha \text{ - нечетное,} \\ \left(\frac{a_1 n_1}{p} \right) \left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}} \right) \frac{1}{p^{(\eta+2-\alpha)/2}}, & \text{если } \eta-\alpha \text{ - четное.} \end{cases}$$

Пусть $k > \eta + 1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны нулю в силу утверждения 6 из леммы 2 и утверждения 3 из леммы 3.

Если α и η – нечетные, получаем следующий множитель:



$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ (c, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \alpha < \eta < \beta}} \left(1 + \frac{p-1}{p} \left(\left(\frac{-cd}{p} \right) + \left(\frac{-cd}{p^2} \right) + \dots + \left(\frac{-cd}{p^\alpha} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{p-1}{p} \left(\left(\frac{-cd}{p^{\alpha+2}} \right) \frac{1}{p} + \left(\frac{-cd}{p^{\alpha+4}} \right) \frac{1}{p^2} + \dots + \left(\frac{-cd}{p^\eta} \right) \frac{1}{p^{(\eta-\alpha)/2}} \right) + \left(\frac{a_1 n_1}{p} \right) \left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}} \right) \frac{1}{p^{(\eta-\alpha+2)/2}} \right).$$

Данная скобка равна нулю, если $a_1 n_1$ и $(-cd)$ – квадратичные невычеты по модулю p .

4. Случай, когда три коэффициента и n делятся на p

Пусть

$$a = p^\alpha a_1, (a_1; p) = 1, b = p^\beta b_1, (b_1; p) = 1, c = p^\gamma c_1, (c_1; p) = 1, n = p^\eta n_1, (n_1; p) = 1,$$

$$\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \gamma \geq 1, \eta \geq 1.$$

1. Рассмотрим случай, когда $\eta < \alpha \leq \beta \leq \gamma$. Получим

$$A(p^k) = \frac{1}{p^{4k}} p^{3k} \left(\frac{d}{p^k} \right) S(p^k; 1; 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^k)=1}}^{p^k} \left(\frac{l}{p^k} \right) e^{-2\pi \frac{nl}{p^k}} = \\ = \begin{cases} p^{k/2-1} (p-1), & \text{если } 1 \leq k \leq \eta \text{ и } k - \text{четное,} \\ 0, & \text{если } 1 \leq k \leq \eta \text{ и } k - \text{нечетное,} \\ -p^{(\eta-1)/2}, & \text{если } k = \eta + 1 \text{ и } \eta - \text{нечетное,} \\ \left(\frac{dn_1}{p} \right) p^{\eta/2}, & \text{если } k = \eta + 1 \text{ и } \eta - \text{четное,} \\ 0, & \text{если } k > \eta + 1. \end{cases}$$

Пусть η – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \eta < \alpha \leq \beta \leq \gamma}} p^{\eta/2} \left(1 + \left(\frac{dn_1}{p} \right) \right).$$

Данная скобка равна нулю, если dn_1 является квадратичным невычетом по модулю p .

Пусть η – нечетное. Получаем следующий множитель:



$$\prod_{\substack{p \\ a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \eta < \alpha \leq \beta \leq \gamma}} (1 + (p-1)(1 + p + p^2 + \dots + p^{(\eta-1)/2-1}) - p^{(\eta-1)/2}) = 0.$$

2. Рассмотрим случай, когда $\eta = \alpha < \beta \leq \gamma$. Если $1 \leq k \leq \eta$, то $A(p^k) = 0$ для нечетного k , и $A(p^k) = p^{k/2-1}(p-1)$ для четного k .

$$A(p^{\eta+1}) = \begin{cases} \left(\frac{a_1 n_1}{p}\right) p^{(\eta-1)/2}, & \text{если } \eta - \text{нечетное,} \\ -\left(\frac{a_1 d}{p}\right) p^{\eta/2-1}, & \text{если } \eta - \text{четное.} \end{cases}$$

При $k > \eta + 1$ имеем $A(p^k) = 0$.

Если η – нечетное, получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \eta = \alpha \leq \beta \leq \gamma}} \left(\left(1 + \left(\frac{a_1 n_1}{p} \right) \right) p^{(\eta-1)/2} \right).$$

Данная скобка равна нулю, если $a_1 n_1$ является квадратичным невычетом по модулю p .

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \eta < \beta \leq \gamma$. Если $1 \leq k \leq \alpha$, то $A(p^k) = 0$ для нечетного k , и $A(p^k) = p^{k/2-1}(p-1)$ для четного k . Если $\alpha < k \leq \eta$, то $A(p^k) = 0$ для нечетного α , и для четного α имеем:

$$A(p^k) = p^{\alpha/2-1}(p-1) \left(\frac{-a_1 d}{p^k} \right).$$

Получим

$$A(p^{\eta+1}) = \begin{cases} \left(\frac{a_1}{p^\eta}\right) \left(\frac{d}{p^{\eta+1}}\right) \left(\frac{n_1}{p}\right) p^{(\alpha-1)/2}, & \text{если } \alpha - \text{нечетное,} \\ -\left(\frac{-a_1 d}{p^{\eta+1}}\right) p^{\alpha/2-1}, & \text{если } \alpha - \text{четное.} \end{cases}$$

При $k > \eta + 1$ $A(p^k) = 0$.

Если α – четное, получаем множитель:



$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \alpha < \eta < \beta \leq \gamma}} \left(p^{\alpha/2-1} \left(p + (p-1) \left(\left(\frac{-a_1 d}{p^{\alpha+1}} \right) + \left(\frac{-a_1 d}{p^{\alpha+2}} \right) + \dots + \left(\frac{-a_1 d}{p^\eta} \right) \right) - \left(\frac{-a_1 d}{p^{\eta+1}} \right) \right) \right).$$

Если $a_1 d$ является квадратичным невычетом по модулю p и η – нечетное, то рассматриваемая скобка равна нулю.

Если α – нечетное, получаем множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \alpha < \eta < \beta \leq \gamma}} \left(p^{(\alpha-1)/2} \left(1 + \left(\frac{a_1}{p^\eta} \right) \left(\frac{d}{p^{\eta+1}} \right) \left(\frac{n_1}{p} \right) \right) \right).$$

Данная скобка равна нулю, если

$$\left(\frac{a_1}{p^\eta} \right) \left(\frac{d}{p^{\eta+1}} \right) \left(\frac{n_1}{p} \right) = -1.$$

4. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \eta = \beta < \gamma$. Если $1 \leq k \leq \alpha$, то $A(p^k) = 0$ для нечетного k , и $A(p^k) = p^{k/2-1}(p-1)$ для четного k . Если $\alpha < k \leq \eta$, то $A(p^k) = 0$ для нечетного α , и для четного α имеем:

$$A(p^k) = p^{\alpha/2-1}(p-1) \left(\frac{-a_1 d}{p^k} \right).$$

$$A(p^{\eta+1}) = \begin{cases} - \left(\frac{a_1}{p^\eta} \right) \left(\frac{-b_1}{p} \right) \left(\frac{d}{p^{\eta+1}} \right) p^{(\alpha-3)/2}, & \text{если } \alpha - \text{нечетное,} \\ \left(\frac{-a_1 d}{p^{\eta+1}} \right) \left(\frac{b_1 n_1}{p} \right) p^{\alpha/2-1}, & \text{если } \alpha - \text{четное.} \end{cases}$$

При $k > \eta + 1$ $A(p^k) = 0$.

Если α – четное, получаем множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \alpha < \eta = \beta < \gamma}} \left(p^{\alpha/2-1} \left(p + (p-1) \left(\left(\frac{-a_1 d}{p^{\alpha+1}} \right) + \left(\frac{-a_1 d}{p^{\alpha+2}} \right) + \dots + \left(\frac{-a_1 d}{p^\eta} \right) \right) + \left(\frac{-a_1 d}{p^{\eta+1}} \right) \left(\frac{b_1 n_1}{p} \right) \right) \right).$$



Данная скобка равна нулю, если η – нечетное, $(-a_1d)$ – квадратичный невычет и b_1n_1 – квадратичный вычет по модулю p .

5. Рассмотрим случай, когда $\alpha \leq \beta < \eta < \gamma$. Если $1 \leq k \leq \alpha$, то $A(p^k) = 0$ для нечетного k , и $A(p^k) = p^{k/2-1}(p-1)$ для четного k . Если $\alpha < k \leq \beta$, то $A(p^k) = 0$ для нечетного α , и для четного α :

$$A(p^k) = p^{\alpha/2-1}(p-1) \left(\frac{-a_1d}{p^k} \right).$$

Если $\beta < k \leq \eta$, то

$$A(p^k) = \begin{cases} \left(\frac{-a_1b_1}{p} \right) \frac{p-1}{p^{(k-\alpha-\beta)/2+1}}, & \text{если } k \text{ - четное, } \alpha \text{ и } \beta \text{ - нечетные,} \\ \left(\frac{-b_1d}{p} \right) \frac{p-1}{p^{(k-\alpha-\beta)/2+1}}, & \text{если } k \text{ и } \alpha \text{ - нечетные, } \beta \text{ - четное,} \\ \left(\frac{-a_1d}{p} \right) \frac{p-1}{p^{(k-\alpha-\beta)/2+1}}, & \text{если } k \text{ и } \beta \text{ - нечетные, } \alpha \text{ - четное,} \\ \frac{p-1}{p^{(k-\alpha-\beta)/2+1}}, & \text{если } k, \alpha \text{ и } \beta \text{ - четные,} \\ 0, & \text{если } 3k - \alpha - \beta \text{ - нечетное.} \end{cases}$$

$$A(p^{\eta+1}) = \begin{cases} - \left(\frac{-a_1b_1}{p} \right) \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+3)/2}}, & \text{если } \eta, \alpha \text{ и } \beta \text{ - нечетные,} \\ - \left(\frac{-a_1d}{p} \right) \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+3)/2}}, & \text{если } \eta \text{ и } \alpha \text{ - четные, } \beta \text{ - нечетное,} \\ - \left(\frac{-b_1d}{p} \right) \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+3)/2}}, & \text{если } \eta \text{ и } \beta \text{ - четные, } \alpha \text{ - нечетное,} \\ - \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+3)/2}}, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ - четные, } \eta \text{ - нечетное,} \\ \left(\frac{-a_1b_1dn_1}{p} \right) \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}, & \text{если } \eta, \alpha \text{ и } \beta \text{ - четные,} \\ \left(\frac{dn_1}{p} \right) \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ - нечетные, } \eta \text{ - четное,} \\ \left(\frac{a_1n_1}{p} \right) \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}, & \text{если } \eta \text{ и } \alpha \text{ - нечетные, } \beta \text{ - четное,} \\ \left(\frac{b_1n_1}{p} \right) \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}, & \text{если } \eta \text{ и } \beta \text{ - нечетные, } \alpha \text{ - четное} \end{cases}$$

Пусть $k > \eta+1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны нулю в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Если η – четное, α и β – нечетные, получим:



$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \alpha \leq \beta < \eta < \gamma}} \left(p^{(\alpha-1)/2} \left(1 + \left(\frac{-a_1 b_1}{p} \right) \right) - \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}} \left(\left(\frac{-a_1 b_1}{p} \right) - \left(\frac{-dn_1}{p} \right) \right) \right).$$

Данная скобка равна нулю, если $(-a_1 b_1)$ и dn_1 – квадратичные невычеты по модулю p .

Если α – четное, η и β – нечетные, получим:

$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \alpha \leq \beta < \eta < \gamma}} \left(p^{\alpha/2-1} \left(p + (p-1) \left(\left(\frac{-a_1 d}{p^{\alpha+1}} \right) + \dots + \left(\frac{-a_1 d}{p^\beta} \right) \right) + \left(\frac{-a_1 d}{p} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}} \left(\left(\frac{b_1 n_1}{p} \right) - \left(\frac{-a_1 d}{p} \right) \right) \right).$$

Данная скобка равна нулю, если $(-a_1 d)$ и $b_1 n_1$ – квадратичные невычеты по модулю p .

Если β – четное, η и α – нечетные, получим

$$\prod_{\substack{a=p^\alpha a_1, \alpha \geq 1 \\ (a_1, p)=1 \\ b=p^\beta b_1, \beta \geq 1 \\ (b_1, p)=1 \\ c=p^\gamma c_1, \gamma \geq 1 \\ (c_1, p)=1 \\ (d, p)=1 \\ n=p^\eta n_1, \eta \geq 1 \\ (n_1, p)=1 \\ 1 \leq \alpha \leq \beta < \eta < \gamma}} \left(p^{(\alpha-1)/2} \left(1 + \left(\frac{-b_1 d}{p} \right) \right) + \frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}} \left(\left(\frac{a_1 n_1}{p} \right) - \left(\frac{-b_1 d}{p} \right) \right) \right).$$

Данная скобка равна нулю, если $(-b_1 d)$ и $a_1 n_1$ – квадратичные невычеты по модулю p .

Заключение

В работе [1] Х.Д. Клоостерман рассмотрел обобщение задачи Лагранжа. Он получил асимптотическую формулу для количества представлений числа n диагональной формой с четырьмя целыми переменными. Клоостерман привел примеры случаев, когда число представлений равно нулю. В работе [1] случаи для простого p , равного двум, рассмотрены более подробно, чем для нечетного простого p . Представление главного члена в виде произведения по простым числам и применение точных формул для сумм Гаусса позволили нам дополнить случаи [1] для нечетного простого p , при которых уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений.

Список литературы References

1. Kloosterman H. D. 1926. On the representation of number in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. Acta mathematica. V. 49: 407–464.
2. Малышев А. В. 1962. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. Тр. МИАН СССР. 65: 3–212.
3. Malyshev A. V. 1962. On the representation of integers by positive quadratic forms. Trudy Mat. Inst. Steklov, 65. Moscow: Acad. Sci. USSR: 3–212.
4. Estermann T. A. 1962. New application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method. Proc. London Math. Soc. 12: 425–444.
4. Hua L.K. 1982. Introduction to number theory. Springer.